

# SAD 2024L, kolokwium I

April 2024

- Z1** Załóżmy, że  $X_1, \dots, X_n$  jest próbką z rozkładu wykładniczego  $\text{Exp}(\lambda)$ , zaś  $Y_1, \dots, Y_m$  jest niezależną od niej próbką z rozkładu  $\text{Exp}(a\lambda)$ . Wyznacz estymatory największej wiarygodności dla parametrów  $a, \lambda > 0$ .
- Z2** Jaś i Małgosia zważyli (a potem zjedli) 200 pierniczek. Zgromadzone obserwacje modelują jako próbkę z rozkładu normalnego  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  z nieznanym parametrem  $\mu \in \mathbb{R}$  oraz ze znaną  $\sigma^2 = 4$ . Na podstawie połowy obserwacji Jaś wyznaczył symetryczny przedział ufności na poziomie ufności 1% dla parametru  $\mu$ . Małgosia uczyniła to samo na podstawie pozostałych obserwacji Jaś uzyskał przedział  $[a, b]$ , zaś Małgosia  $[c, d]$ . Jaki będzie przedział gdy użyjemy całej próbki?
- Z3** Kubuś Puchatek podejrzewa, że producent miodu go oszukuje i w słoikach znajduje się mniej miodu niż powinno. Żeby to potwierdzić kupił 10 słoików 500 ml miodu i zmierzył ich zawartość otrzymał że średnia z pomiarów to  $\bar{X} = 498$  ml, natomiast wariancja próbkowa wyniosła

$$S^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 9,.$$

Przyjmując, że pomiary pochodzą z rozkładu normalnego przeprowadź test weryfikujący hipotezę Kubusia Puchatka na poziomie istotności  $\alpha = 0.05$ . (kwantyle rozkładu  $t$ -Studenta są na osobnej kartce).

- Z4** Dla danych  $(Y_1, X_1), (Y_2, X_2), \dots, (Y_n, X_n)$  takich, że  $\bar{X} = \bar{Y} = 0$  skonstruowano dwa modele liniowe

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

oraz

$$X_i = \gamma_0 + \gamma_1 Y_i + \varepsilon_i.$$

Wyznacz wartości  $\hat{\beta}_0$  i  $\hat{\gamma}_0$  estymatorów uzyskanych metodą najmniejszych kwadratów oraz wykaże, że

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{\hat{\gamma}_1},$$

wtedy i tylko wtedy gdy istnieje  $a \in \mathbb{R}$  takie, że  $x_i = ay_i$  dla każdego  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Kwantyle  $t(p,v)$  rzędu  $p$  rozkładu  $t$ -studenta o  $v$  stopniach swobody

v	p				
	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
36	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719
37	1,305	1,687	2,026	2,431	2,715
38	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712
39	1,304	1,685	2,023	2,426	2,708
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
41	1,303	1,683	2,020	2,421	2,701
42	1,302	1,682	2,018	2,418	2,698
43	1,302	1,681	2,017	2,416	2,695
44	1,301	1,680	2,015	2,414	2,692
45	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690
46	1,300	1,679	2,013	2,410	2,687
47	1,300	1,678	2,012	2,408	2,685
48	1,299	1,677	2,011	2,407	2,682
49	1,299	1,677	2,010	2,405	2,680
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
55	1,297	1,673	2,004	2,396	2,668
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
65	1,295	1,669	1,997	2,385	2,654
70	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648
75	1,293	1,665	1,992	2,377	2,643
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639
90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
150	1,287	1,655	1,976	2,351	2,609
200	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601
300	1,284	1,650	1,968	2,339	2,592
500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586
1000	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581

Kwantyle  $t(p,v)$  rzędu  $p$  rozkładu  $t$ -studenta o  $v$  stopniach swobody

v	p				
	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
31	1,309	1,696	2,040	2,453	2,744
32	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738
33	1,308	1,692	2,035	2,445	2,733
34	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728
35	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724